BTS SIO SLAM

Numération - Changement de bases

- Maj : 30/08/23 -

Dec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hex	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Bin4	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Conversion Binaire > Décimal

On exprime le nombre en puissances de 2

exemple :

$(101,0101)_2 = 2^0 + 2^2 , 2^{-2} + 2^{-4} = 5 , 1/2^2 + 1/2^4 = 5 , 1/4 + 1/16 = (5.3125)_{10}$

Conversion Décimal > Binaire

Partie entière :

- divisions successives par 2, la dernière ayant un quotient de 0
- écrire la liste des restes dans le sens inverse de leur obtention.

Partie décimale :

- Effectuer des multiplications successives par 2 ne portant uniquement sur la partie décimale jusqu'à obtenir soit 1, soit la précision demandée.
- Écrire la liste des parties entières des produits dans l'ordre où ils sont apparus.

exemple :

$(13,375)_{10}$: 13/2=6 reste 1 6/2=3 reste 0 3/2=1 reste 1 1/2=0 reste 1
Donc : 1101 pour la partie entière (**on lit en marche arrière**)

0,375*2=0,750 0,750*2=1,500 0,500*2=1
Donc : 011 pour la partie décimale

Finalement, $(13,375)_{10} = (1101,011)_2$

Conversion Hexadécimal > Binaire

- Exprimer chaque symbole en binaire 4 bits
- Regrouper les symboles du nombre en hexa en paquets de 4 à partir de la virgule
- supprimer les 0 inutiles

exemple :

convertir $(3C,1A)_{16}$:
0011 1100 , 0001 1010, soit $(111100,0001101)_2$

Conversion Binaire > Hexadécimal

- regrouper les paquets de binaires en groupes de 4 bits (compléter avec des 0 si besoin)
- Remplacer chaque regroupement par sa valeur en hexa.

exemple :

$(1101101{,}111011)_2$

0110 1101 , 1110 1100 > 6 13 , 14 12 > $(6D{,}EC)_{16}$

Conversion Hexadécimal > Décimal

Exprimer le nombre à l'aide des puissances de 16

exemple :
convertir $(3C{,}1A)_{16}$:

> 3 12 , 1 10 > $3*16^1 + 12*16^0$, $1*16^{-1} + 10*16^{-2}$ > 48 + 12 , 1/16 + $10*1/16^2$
> 60, 16/256 + 10/256 > $(60,\ 1015625)_{10}$

Conversion Décimal > Hexadécimal

Partie entière :

- divisions successives par 16, la dernière a pour quotient 0
- on écrit la liste des restes dans le sens inverse de leur obtention

Partie décimale :

- multiplications successives par 16 ne portant que sur la partie décimale jusqu'à obtenir soit un entier non nul, soit la précision demandée.
- Ecrire la liste des parties entières dans l'ordre d'apparition

exemple :

2656,71875 en hexa :

2656/16 = 166 reste 0 166/16 = 10 reste 6 10/16 = 0 reste 10
> 10 6 0, soit A60

0.71875*16=11.5 0.5*16=8 (entier non nul)
> 11 8 , soit B8

Résultat : $(A60{,}B8)_{16}$

Précisions / arrondis

N=432,615 arrondi à 10 près : 430 à 1 près : 433 à 0,01 près : 432,62
N=$(101{,}10011)_2$ arrondi à 1_2 près : 110 à $0{,}1_2$ près : 101,1
N=$(B82A,\ 7AB)_{16}$ arrondi à 100_{16} près : $B800_{16}$ à $0{,}1_{16}$ près : $B82A{,}8_{16}$

Opérations binaires et Hexa

$$
\begin{array}{r} 0101 \\ +\ \underline{1110} \\ 10011 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 10110 \\ -\ \underline{111} \\ 01111 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 101 \\ x\ \underline{10} \\ 000 \\ \underline{101} \\ 01010 \end{array}
\qquad
101{,}1 \big/ 100 = 1{,}011
$$

Donner des indications pour + et -

Dans la soustraction binaire, on procède comme en décimal. Quand la quantité à soustraire est supérieure à la quantité dont on soustrait, on emprunte 1 au voisin de gauche. En binaire, ce 1 ajoute 2 à la quantité dont on soustrait, tandis qu'en décimal il ajoute 10.

Dans l'exemple suivant, on doit soustraire 0 - 1 pour le bit de droite. On emprunte 1 au bit de gauche et on a maintenant 10 - 1, i.e. 2 - 1 = 1. Ensuite on retranche cet emprunt du bit de gauche, et on a 1 - 0 - 1 = 0.

$$
\begin{array}{r} 1\,^{1}0 \\ 0\ 1 \\ \underline{{\scriptstyle 1}\ \ \ } \\ 0\ 1 \end{array}
$$

- 0 - 0 = 0
- 0 - 1 = (on emprunte "1" ce qui fait 10-1, on écrit "1" et on retient 1)
- 1 - 0 = 1
- 1 - 1 = 0
- 0 - 1 - 1 = (on emprunte "1" ce qui fait 10-1-1, on écrit "0" et on retient "1")
- 1 - 1 - 1 = 0 - 1

Exemple d'application:

$$
\begin{array}{r} 111 \\ \underline{-\ 101} \\ 010 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 111{,}011 \\ \underline{-\ 100{,}110} \\ 010{,}101 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1101000 \\ \underline{-\ 1011110} \\ 0001010 \end{array}
$$

HEXA : Addition

Par exemple 1100110111001_2 + 1100011111100110_2 devient $19B9_{16}$ + $C7E6_{16}$. Cette addition s'effectue comme en décimal, sauf qu'on génère une retenue lorsqu'une somme partielle dépasse 16 au lieu de 10 :

$$
\begin{array}{r} {\scriptstyle 11} \\ 19B9_{16} \\ \underline{C7E6_{16}} \\ E19F_{16} \end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & & \\
1 & 9 & 11 & 9 \\
12 & 7 & 14 & 6 \\ \hline
14 & 17 & 25 & 15 \\
 & 16+1 & 16+9 & \\ \hline
E & 1 & 9 & F
\end{array}
$$

Divisibilité, nombres premiers et congruences

Pour tout entier nat. a et pour tout entier nat b non nul, et il existe q et r tel que :
a = **b** x **q** + **r** avec $0 \leqslant r < b$
q est le quotient de la div de a par b et r est le reste de cette division.
.
Critères de divisibilité

> n est divisible par 2 s'il est pair (chiffre des unités 0,2,4,6 ou 8)
> n est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
> n est divisible par 4 si le nb formé par ses 2 chiffres de droite est divisible par 4.
> n est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
> n est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Si a est divisible par b, alors tout multiple de a est divisible par b.
Si a est divisible par b et si b est divisible par c, alors a est divisible par c.
Si a et b sont divisibles par c, alors a+b et a-b sont divisibles par c.

Le nombre de diviseurs d'un nombre premier *a* élevé à la puissance *n*, soit a^n, est (n + 1).
Par exemple, 5^3 a quatre diviseurs : 1, 5, 25 et 125.

Un nombre entier nat n est premier s'il a exactement 2 diviseurs : 1 et n.
(divisible par aucun nombre que lui-même)

Si un nombre entier n >= 2 n'est pas premier, alors il a au moins un diviseur premier inférieur ou égal à sqrt(n)

PGCD DE 2 ENTIERS

a et b € à N, il existe un diviseur commun à a et b plus grand que tous les autres : c'est le plus grand diviseur commun, le PGCD.

PGCD (a ; b)

soit a, b deux entiers >= 2 :

- S'ils n'ont **pas de facteur commun**, alors leur **PGCD est 1**

- **Sinon**, leur PGCD est le **produit des facteurs communs** aux 2 décompositions (chaque facteur étant affecté du plus petit exposant avec lequel il figure dans les 2 décompositions)

Soit a et b deux entiers >=0, tels que a > b
Soit R le reste de la div. de a par b, alors le **PGCD(a;b) = PGCD(b;R)**

ex : 10 / 5 = 2 reste 0 => PGCD (10;5) = PGCD (5; 0)
ex : 10 / 4 = 2 reste 2 => PGCD (10;4) = PGCD (4; 2) = 2
ex : 123 / 4 = 30 reste 3 => PGCD (123;4) = PGCD (4; 3) = 1

PGCD (182; 56) = PGCD (56; 14) car 14 est le reste de la div. de 182 par 56

Algorithme d'Euclide : méthode pour chercher un PGCD :
PGCD(a;b) = PGCD(b;R), on applique donc plusieurs fois cette propriété jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD est alors le dernier diviseur essayé.

a	b	R
1148	1086	62
1086	62	32
62	32	30
32	30	2
30	2	0

PGCD = 2

CONGRUENCES

a et b sont **congrus modulo n** si et seulement si a et b ont le **même reste** dans la division par n.

$a \equiv b[n]$ ou $b \equiv a[n]$ $a \equiv a[n]$ et $a \equiv r[n]$ avec **r** le reste de la div. a/b

Soient a et b 2 entiers nat. avec a > b et n entier non nul, alors **a est congru à b modulo n** si et seulement si **a-b est multiple de n.**

Soient a,b,c,d des entiers nat, et n entier nat non nul - Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors :
$a+c \equiv b+d[n]$ et $a-c \equiv b-d[n]$ $pa \equiv pb[n]$ $pour\ tout\ entier\ nat.\ p$ $ac \equiv bd[n]$
$a^p \equiv b^p[n]$ $pour\ tout\ entier\ nat.\ p$

SUITES NUMERIQUES

Sur la calculatrice : fonction "RECUR" du MAIN MENU (au démarrage)

Suite arithmétique :

Suite de nombres telle que chacun des termes, autre que le premier, s'obtient en ajoutant au terme précédent un même nombre appelé raison.

$u_{n+1} = u_n + r$

avec r = raison de la suite arithmétique.

Calcul du terme de rang n :

$u_n = u_0 + n.r = u_1 + (n-1).r$

Calcul de la somme des n termes consécutifs :

S = nombre de termes x (premier terme + dernier terme) / 2

Si le premier terme de la suite est u_0 : $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1) \times (u_0+u_n)/2$
Si le premier terme de la suite est u_1 : $S = u_1 + u_2 + ... + u_n = n \times (u_1+u_n)/2$

Suite géométrique :

$u_{n+1} = u_n \times q$ avec q = raison de la suite

Calcul du terme de rang n :

$u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1}$

Calcul de la somme de n termes consécutifs :

S = premier terme x $(1 - q^{\text{nb termes}}) / (1 - q)$

Lorsque le premier terme de la suite est u0 : $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times (1-q^{n+1}) / (1-q)$
Lorsque le premier terme de la suite est u1 : $S = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \times (1-q^n) / (1-q)$

======================================= Propriétés

Soit u_n une suite arithmétique de raison r. Si $r > 0$ alors (u_n) est croissante.

Soit u_n une suite géométrique de raison q. $(q>0)$ - Si $0<q<1$ alors (u_n) est décroissante
Si $q>1$ alors (u_n) est croissante.

Limite d'une suite géométrique:

Soient un une suite géo. de raison q et de premier terme u0, nombre réel.

- si $0<q<1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
- si $q>1$ et $u0>0$; on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- si $q>1$ et $u0<0$; on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

DIVERS :

$\ln a^n = n.\ln a$

POURCENTAGES

> tableau de proportionnalité (produit en croix)

```
13 dp ----> 28 élèves
x  dp ----> 100 élèves
```

$x=\frac{(13*100)}{28}=46$ 46% des élèves sont demi-pensionnaires

Prix HT = 85€, TVA de 20%
> Montant TVA : 85x20/100 = 37

Calcul d'une augmentation, diminution :

Augmenter une quantité de x % --> multiplier par (1 + x/100)

Diminuer une quantité de x % --> multiplier par (1 - x/100)

Exemple :
Un salaire de 2700€ a augmenté de 3%
Nouveau salaire : 2700 x (1+ 3/100) = 2700 x 103/100 = 2700 x 1.03 = 2781
Remise de 12% sur 1 article à 250€ : 250 x 0.88 = 220

CALCUL BOOLEEN

Fonction **ET** :
Si a=1, b=1, res1 = 1 sinon 0

Fonction **OU** :
Si a=1, b=0   OU   si a=0, b=1   OU   si a=b=1   ALORS   res2=1

res1 est le produit des variables a et b ----> res1 = a.b
res2 est la somme des variables a et b ----> res2 = a+b

Complémentation = **NON**
$a \dashrightarrow \bar{a}$

Propriétés dans l'algèbre de Boole :

- **a+a=a et aa=a**
- **a+b=b+a   ab=ba   (commutatif)**
- **(a+b)+c=a+(b+c)   (ab)c=a(bc)   (associatif)**
- **a(b+c)=ab+ac   (distributif)**
- **0 est l'élément neutre de l'addition (0+a=a+0=a)**
- **1 est l'élément neutre de la multiplication : 1a=a1=a**
- **1 est l'élément absorbant de l'addition (1+a=a+1=1)**
- **0 est l'élément absorbant de la multiplication (0a=a0=0)**
- **Quelque soit a : $a+\bar{a}=1$ $a\bar{a}=0$**

LOI DE MORGAN

Quelques soient les variables a et b d'un algèbre de Boole, on a:

$\overline{a+b} = \bar{a}.\bar{b}$ et $\overline{a.b} = \bar{a}+\bar{b}$

Tableau de Karnaugh

	b	$\bar{\mathbf{b}}$
a		
$\bar{\mathbf{a}}$		

Première ligne : $ab+a\bar{b} = a(b+\bar{b}) = a.1 = a$
La deuxième ligne correspond à $\bar{a}$

expression de $\bar{a}+b$ --->

	bc	$\mathbf{b\bar{c}}$	$\overline{\mathbf{bc}}$	$\mathbf{\bar{b}c}$
a				
$\bar{\mathbf{a}}$				

	bc	$b\bar{c}$	$\overline{bc}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

Expression booléenne représentée :

$a+bc+\bar{b}c = a+c$

PROPOSITIONS ET PREDICATS

Une proposition est un énoncé ayant un sens et dont on peut dire avec certitude qu'il est vrai ou faux (ce sont des valeurs vérité)

Négation d'une proposition p :
non (p), ou -p ou $\bar{p}$

Equivalence de 2 propositions :
P<=>Q

P	Q	P<=>Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple : Donner la valeur de A <=> B : $2^{10}=1024 \Leftrightarrow 5<4$
A<=>B : 0 (A vraie et B fausse)

Conjonction de propositions :
P^Q : se lit "p et q"

Conjonction = ET

P	Q	P^Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjonction de propositions :
PvQ : se lit "p ou q"

Disjonction = OU

P	Q	PvQ
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implication de propositions :
P => Q (p implique q)

P	Q	P => Q
1	1	1
1	**0**	**0**
0	1	1
0	0	1

Exemple :
Donner la valeur de la proposition B => A: $5<4 \Rightarrow 2^{10} = 1024$
La proposition est vraie : 0 => 1 donne 1 (faux implique vrai).

Proposition vraies (tautologies) :

- (P et Q) <=> (Q et P)
- (P ou Q) <=> (Q ou P)
- ((P et Q) et R) <=> (P et (Q et R))
- ((P ou Q) ou R) <=> (P ou (Q ou R))
- (P ou (Q et R)) <=> (P ou Q) et (P ou R)
- (P et (Q ou R)) <=> (P et Q) ou (P et R)
- (P=>Q) <=> (non(P) ou Q)
- non(P et Q) <=> ((non (P) ou non (Q)) (loi de Morgan)
- non(P ou Q) <=> ((non (P) et non (Q)) (loi de Morgan)

PREDICAT

x-2>0 n'est pas une proposition, car sans connaitre x, on ne peut pas dire si elle est vraie ou fausse.
C'est un prédicat à une variable x
Mais si on ajoute une information à la variable x, alors on écrit une proposition :
"Si x>3, alors x-2>0" est une proposition vraie, et "si x=2, alors x-2>0" est une proposition fausse.

ORDONNANCEMENT

Projet, méthode MPM

Soit la conception et de réalisation d'un projet avec la logique suivante :

Tâche	Activité	Prédécesseur	Durée en jour
A	Commande client		7
B	Validation du projet		9
C	Cadrage du projet	A, B	3
D	Préparation et découpages	B	4
E	Planification	C, D	2
F	Affectation des ressources	C, D	7
G	Pilotage et suivi	F	3
H	Finition	E, F	5

Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe :

On barre de façon successive les tâches qui n'ont pas de précédents, on commence par les tâches A et B et ainsi de suite :

N0 = { A, B }   N1 = { C, D }   N2 = { E, F }   N3 = { G, H }

(Barrer les lettres des tâches de la colonne Tâche et les lettres de ces mêmes tâches dans la colonne des prédécesseurs, au fur et à mesure.)